جامعة البعث	إمتحان مقرر بنى جبرية (4)	اسم الطالب :
كلية العلوم	لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر	المدة : ساعة ونصف
قسم الرياضيات	الفصل الأول للعام الدراسي 2018/2017	العلامة : 100

السؤال الأول : (15 علامة)

أثبت أن نصف الزمرة S التي تحقق الشرط $\forall a \in S \,;\, aS = Sa = S$ تكون زمرة .

السؤال الثاني : (15 علامة)

أ) أذكر تعريف الإنسحاب اليميني والإنسحاب اليساري لنصف زمرة S .

ب) إذا كان λ إنسحاب يساري لنصف زمرة S و $a \in S$ ، فاثبت أن $\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$.

السؤال الثالث : (15 علامة)

لتكن S نصف زمرة و A مجموعة جزئية غير خالية من S ، فاثبت أن $B = \langle A \rangle$ إذا وفقط إذا كانت B هي تقاطع جميع أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A .

السؤال الرابع : (15 علامة)

أثبت أن نصف الزمرة الدوارة $\langle a \rangle$ ذات الدليل r والدور m تكون زمرة إذا وفقط إذا كانت $r = 1$.

السؤال الخامس : (15 علامة)

أثبت ان كل زمرة طبولوجية تملك جملة أساسية تناظرية $\{u\}$ لمجاورات العنصر الحيادي e .

السؤال السادس : (15 علامة)

اثبت انه من أجل أي زمرة جزئية مفتوحة H في زمرة نصف طبولوجية G فإن H تكون مغلقة أيضاً.

السؤال السابع : (10 علامات)

لتكن $G = \{1 , -1 , i , -i\}$ حيث i العدد التخيلي ، ولنعرف على G الضرب العادي المألوف فتصبح G زمرة ، لنزودها بالطبولوجيا τ المعرفة بالشكل التالي: $A \in \tau \Leftrightarrow 1 \in \tau$ إضافة للمجموعة الخالية (أي ان المجموعات المفتوحة في G هي المجموعات الحاوية على العنصر 1 إضافة للمجموعة الخالية)

1) هل التطبيق $g_1 : G \times G \to G$ حيث $g_1(x, y) = xy$ مستمر في النقطة $(1, i)$ ولماذا ؟
2) هل التطبيق $g_2 : G \to G$ حيث $g_2(x) = x^{-1}$ مستمر في النقطة $-i$ ولماذا ؟

حمص في 15 / 2 / 2018

د . عصام تسيم

سلم تصحيح مقرر بنى جبرية (٤)
لطلاب السنة رابعة رياضيات - جبر
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨

السؤال الأول: 15

• العملية تجميعية على S

• x حيادي يميني في S

$\forall a \in S ; aS = S \Rightarrow \forall a \in S ; \exists x \in S ; ax = a \Rightarrow$

y حيادي يساري في S

$\forall a \in S ; Sa = S \Rightarrow \forall a \in S ; \exists y \in S ; ya = a \Rightarrow$

(8)

أي أن S تملك عنصراً حيادياً لنرمز له بـ e

$x = yx = y$

$e \in S \;\&\; \forall a \in S ; aS = S \Rightarrow \exists a' \in S ; a a' = e$

$e \in S \;\&\; \forall a \in S ; Sa = S \Rightarrow \exists a'' \in S ; a'' a = e$ $\Big\} \Rightarrow$ (7)

$a'' = a'' e = a'' a a' = e a' = a' \Rightarrow \forall a \in S ; \exists a' \in S ; a a' = a' a = e$

ومنه نستنتج أن S زمرة.

السؤال الثاني: 15

أ) نقول عن تحويل ρ لنصف زمرة S أنه انسحاب يميني لـ S إذا كان:

(5) $x\rho(y) = \rho(xy) \quad ; \forall x, y \in S$

• ونقول عن تحويل λ لنصف زمرة S أنه انسحاب يساري لـ S إذا كان:

(5) $\lambda(x) y = \lambda(xy) \quad ; \forall x, y \in S$

ب)

$\lambda \lambda_a(x) = \lambda(ax) = \lambda(a) x = \lambda_{\lambda(a)}(x) \quad ; \forall x \in S \Rightarrow$

(5) $\lambda \lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$

السؤال الثالث: 15

• بفرض أن B هي تقاطع جميع أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A، إن

(5) $A \subseteq B$ و B نصف زمرة $\Leftarrow$ B تحوي كل الجداءات الممكنة لعناصر من A أي

أن $\langle A \rangle \subseteq B$

• من ناحية أخرى $A \subseteq \langle A \rangle$ وبالتالي حسب تعريف B فإن $B \subseteq \langle A \rangle$ ومنه ينتج (5)

$\langle A \rangle = B$

العكس: لنفرض أن $B=\langle A\rangle$ تكون حاوية لـ A وبالتالي فهي تحوي $\langle A\rangle$
أن كل نصف زمرة جزئية من S تحوي A تكون حاوية لـ A أي أن B تحوي
ومنه ينتج أن B هي أصغر نصف زمرة جزئية من S تحوي (5)
تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية لـ A.

السؤال الرابع: 15

$K_a=\{a^r,a^{r+1},\dots,a^{r+m-1}\}$ هي زمرة
• لنفرض أن $r=1$ من المعروف أن
$K_a=\{a,a^2,\dots,a^m\}=\langle a\rangle$
جزئية من $\langle a\rangle$ عندما $r=1$ تصبح (8)
وبالتالي فإن $\langle a\rangle$ تصبح زمرة.
• العكس: لنفرض أن $\langle a\rangle=\{a,a^2,\dots,a^r,\dots,a^{r+m-1}\}$ زمرة دوارة فإن
$a^{r+m}=a \Leftarrow a^{r+m-1}\cdot a=a$
a^{r+m-1} يكون حيادي فيها إذا حققت
$\Leftarrow a^r=a \Leftarrow r=1$ (7)

السؤال الخامس: 15

لتكن $\{v\}$ جملة أساسية من الجاورات المفتوحة للعنصر الحيادي e وبما أن
$e=e^{-1}$ وأن g_2 هوميومورفيزم يكون من أجل أي v من $\{v\}$ فإن v^{-1} تكون (8)
مجاورة مفتوحة للعنصر e، فإذا أخذنا $u=v\cap v^{-1}$ فإن u تكون مجاورة متناظرة
للعنصر e وذلك لأن $u^{-1}=v\cap v^{-1}=u$ وبما أن كل مجاورة v تحوي مجاورة u
ينتج أن كل مجاورة لـ e تحوي مجاورة v و v تحوي u ينتج أن $\{u\}$ تشكل جملة
أساسية لمجاورات العنصر e وهي متناظرة. (7)

السؤال السادس: 15

من أجل أي x من G فإن xH مفتوحة وبالتالي فإن $\bigcup_{x\notin H} xH$ تكون مفتوحة
وبالتالي $G-\bigcup_{x\notin H} xH$ تكون مغلقة ولنبرهن أن $H=G-\bigcup_{x\notin H} xH$
• لتكن $y\in H \Leftarrow y\notin xH$ ؛ $\forall x\notin H$ لأنه لو كان خلاف ذلك لكان $y\in xH$
$\Leftarrow$ توجد $h\in H$ بحيث يكون $y=xh \Leftarrow yh^{-1}=x \Rightarrow H$ لأن H زمرة $\Leftarrow x\in H$
وهذا غير ممكن) $\Leftarrow y\notin \bigcup_{x\notin H} xH \Leftarrow y\in G-\bigcup_{x\notin H} xH$ أي أن (8)

(1) $H\subseteq G-\bigcup_{x\notin H} xH$

... $y \in G - \bigcup_{x \notin H} xH \Leftarrow y \notin \bigcup_{x \notin H} xH \Leftarrow y \notin xH$ وذلك مهما يكن $x \notin H$

$\Leftarrow \forall h \in H$ و $\forall x \notin H$ فإن $y \neq xh \Leftarrow$ من أجل $h = e$ يكون $y \neq x$ و ~~$\forall x \notin H$~~

وذلك $\forall x \notin H \Leftarrow y \in H \Leftarrow$ $\boxed{G - \bigcup_{x \notin H} xH \subseteq H}$ (2)

(7)

ومن الاحتوائين ينتج المساواة $H = G - \bigcup_{x \notin H} xH$ أي أن H مغلقة

السؤال السابع : $\boxed{10}$

1) $i = (1, 1)_1 g$ إن أصغر مجاورة للعنصر i هي $\{1, i\}$ وأصغر مجاورة للعنصر 1 هي $\{1\}$ وأصغر مجاورة للعنصر i هي $\{1, i\}$ وبالتالي فإن

$g_1(\{1\} \times \{1, i\}) = \{1, i\} \subseteq \{1, i\}$ (5)

أي أن g_1 مستمر في النقطة $(1, i)$

2) إن $i = \frac{1}{-i} = (-i)_2 g$ وإن أصغر مجاورة للعنصر i هي $\{1, i\}$ وأصغر مجاورة للعنصر $-i$ هي $\{1, -i\}$ وأن

$g_2(\{1, -i\}) = \{1, i\} \subseteq \{1, i\}$

(5) أي أن g_2 مستمر في النقطة $-i$

د. عصام نسيم